

# ラジアン角の近似値を求める冪級数展開のまとめと和算での別解について

学籍番号：10TA531K ・ 氏名：竹花卓 ・ 提出日：3月14日

## 1 はじめに

近年、日本で江戸時代に流行した数学(和算)が、現代数学でも証明の難しい問題を多く含んでいるため注目されている。有名なのは、円理という一分野における円周率の高精度な近似計算(文献 [1]) などである。本稿では、辺の長さなどから角度の近似値を求めるための冪級数展開の公式について、和算中期から現代まで一般的である計算と和算初期に存在した三元率を用いた手法を比較する。三元率は、幾何学的な図形分割による長さを全て無限級数で表して求めており、特に内率の結果から美しい恒等式 (9) の存在も予想できた。現代では、多項式補間やエイトケン補外などより速い計算アルゴリズムの研究も盛んであるが、数論や複素解析の初等的な基礎知識として本問題をまとめる。

## 2 単純な無限等比級数の収束

単純な例として、式 (1) の等比級数を定義する。

$$F_n[t] = (1-t) \sum_{i=0}^n t^i = 1-t^{n+1} \quad (\text{where } 0 < t < 1) \quad (1)$$

例えば、自然数  $n$  に対する  $F_n[0.3] \cdot F_n[0.6] \cdot F_n[0.8] \cdot F_n[0.9]$  の値(と包絡線)を図 1 に示すと、いずれも  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n[t] = 1$  に収束していくのがわかる。収束速度の比較については、初期値が大きい方や変化量の比  $\left| \frac{F_{n+1}[t] - F_n[t]}{F_n[t] - F_{n-1}[t]} \right|$  が小さい方など一概に言うのは難しい。

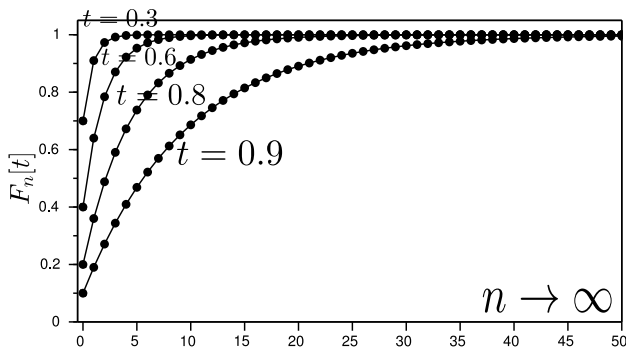


図 1: 異なる公比による等比級数の収束速度の違い

## 3 逆正弦関数のテイラー展開

アークサインは、文献 [2] より式 (2) で近似できる。

$$\theta_n[x] \sim \sum_{i=0}^n \frac{\binom{2i}{i} x^{2i+1}}{4^i (2i+1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \text{Sin}^{-1} x \quad (\text{where } -1 < x < 1) \quad (2)$$

導出方法は、 $x' = \sin \theta$  としたとき、 $\frac{d\theta}{dx'} = \frac{1}{\sqrt{1-x'^2}}$  であることから、ニュートンの一般化二項定理による無限級数をふまえて積分  $\theta = \int_0^x \left( \frac{d\theta}{dx'} \right) dx'$  で得られる。

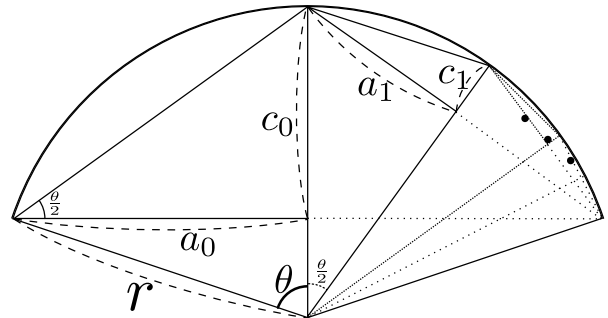


図 2: 角度の近似値を求めるための辺の長さや扇形

問題を図 2 のようにモデル化すれば、半径  $r$  と弦の半分  $a_0$  から角度を  $\theta = \text{Sin}^{-1} \left( \frac{a_0}{r} \right)$  で求めるのがまず考えられる。さらに、 $c_0 = r \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{a_0}{r} \right)^2} \right)$  から、

$$\frac{a_k}{r} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \left( \frac{a_{k-1}}{r} \right)^2}}{2}} \quad \text{なので、式 (3) で一般化できる。}$$

$$\theta_n \left[ \frac{a_k}{r} \right] \sim 2^k \left( \frac{a_k}{r} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} \left( \frac{a_k}{r} \right)^{2n+1} \right) \quad (3)$$

ちなみに、自然数  $k$  が 1 以上のとき、 $\frac{a_k}{r} = \sqrt{\frac{c_{k-1}}{2r}}$  や  $\frac{c_k}{r} = 1 - \sqrt{1 - \frac{c_{k-1}}{2r}}$  も成り立つことも後で用いる。

## 4 半角の逆正接関数の冪級数

アークタンジェントの冪級数展開も、前節と同様な導出方法で求められる。このマーダヴァ・グレゴリー・ライプニッツ級数と呼ばれる通常の式 (4) は、円周率の近似値を求める際に収束が遅いことが知られている。

$$\theta_n[y] \sim \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i y^{2i+1}}{2i+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \text{Tan}^{-1} y \quad (\text{where } -1 < y < 1) \quad (4)$$

図 2 のモデルを考えれば、式 (5) で一般化できる。

$$\theta_n \left[ \frac{c_k}{a_k} \right] \sim 2^{k+1} \left( \frac{c_k}{a_k} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} \left( \frac{c_k}{a_k} \right)^{2n+1} \right) \quad (5)$$

## 5 和算初期に存在した三元率

和算初期の円理は、本多利明いわく関孝和・建部賢弘・久留島義太・松永良弼・山路主住の功績によって、『弧背詳解』[3, p.351] の三元率 (7) になったとされる。本稿でも、松永良弼『円理乾坤之巻』[3, pp. 補遺 168-170] に習って、主に図 2 の直径  $2r$  と矢  $c_0$  を用いて表す。

まず,  $|X| < 1$  で  $1 - \sqrt{1 - X}$  を展開し式 (6) を得る .

$$(二斜矢 \cdot 甲矢) c_1 = r \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i-1)!!}{(2i+2)!!} \left(\frac{c_0}{2r}\right)^{i+1} \quad (6)$$

次に, 文献 [5] のような冪級数を合成する手法によって, 式 (6) から繰り返し  $2^{k-1}$  斜矢  $c_{k-1}$  まで係数を導出し, 文献 [4] の結果から式 (7) になったと推察する .

$$c_{k-1} \sim \frac{r}{2^{2k-4}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{((2i)!!)^2}{\prod_{j=0}^i (2j+1)(2j+2)} \left(\frac{c_0}{2r}\right)^{i+1} \quad (7)$$

$$(2^k \text{ 面料}) a_k = \sqrt{\frac{r}{2}} c_{k-1} \sim \frac{a_0}{2^k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!!}{(2i+1)!!} \left(\frac{c_0}{2r}\right)^i$$

最終的には, 折術  $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) < \frac{\theta}{2^n} < \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$  から, 内元率  $\theta_n[\text{内}] \sim 2^n \left(\frac{a_n}{r}\right)$ , 中元率  $\theta_n[\text{中}] \sim 2^{n+1} \left(\frac{a_{n+1}}{r}\right)$ , 外元率  $\theta_n[\text{外}] \sim 2^{n+1} \left(\frac{c_n}{a_n}\right)$  で式 (8) を得たと考える .

$$\theta_n[\text{内}] \sim \frac{a_0}{r} \left(1 + \dots + \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \left(\frac{c_0}{2r}\right)^n\right) \quad (8)$$

$$\theta_n[\text{中}] \sim \frac{2a_1}{r} \left(1 + \dots + \frac{((2n-1)!!)^2}{\prod_{j=1}^n 2j(2j+1)} \left(\frac{c_0}{2r}\right)^n\right)$$

$$\theta_n[\text{外}] \sim \frac{2c_0}{a_0} \left(2 - 1 - \dots - \frac{\prod_{j=1}^n 2^j}{(2n+1)!!} \left(\frac{c_0}{2r}\right)^n\right)$$

この内元率を詳しく計算すると, 式 (9) のような一見各係数の異なる冪級数展開の恒等式が予想できる .

$$\sin^{-1} X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! X^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} \equiv \sqrt{1-X^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!! X^{2n+1}}{(2n+1)!!} \quad (9)$$

ちなみに, 和算中期の安島直円『弧背術解』[3, p.340] で現代と同様の区分求積による冪級数展開が得られており, 和算後期には精度は悪いがより計算しやすい近似式 (弧矢弦術  $(r\theta)^2 \sim a_0^2 + \frac{N}{4} c_0^2$  の式を角によって  $N \sim 5$  から変えて使う等) が出回っていたようだ .

## 6 $\theta = \frac{\pi}{3}$ での級数近似の収束比較

図 3 は, 式 (3) の  $\theta_n\left[\frac{a_1}{r}\right]$  を赤, 式 (5) の  $\theta_n\left[\frac{c_1}{a_1}\right]$  を青, 式 (7) での  $\theta_n$  を緑, 式 (8) の  $\theta_n[\text{内}]$  を紫・ $\theta_n[\text{中}]$  を黄・ $\theta_n[\text{外}]$  を水色としてグラフ化した結果である .

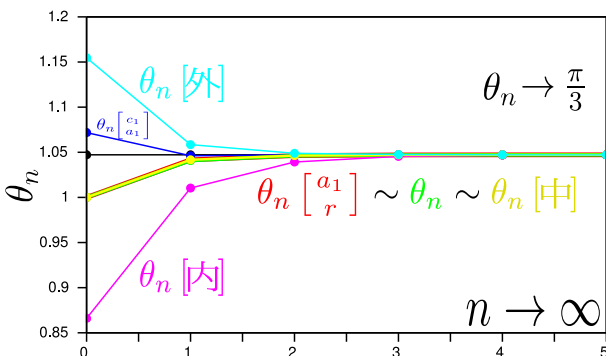


図 3: 各級数近似での原数から第  $n$  差までの比較

収束速度を比較するために, 理論値からの誤差を  $4^n$  倍したズレをグラフ化すれば, 図 4 のようになった .

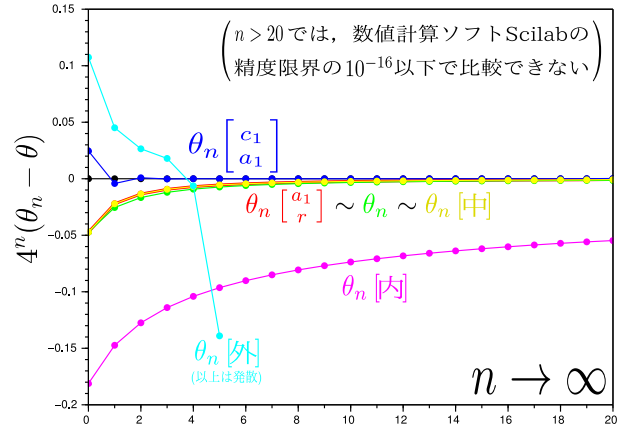


図 4: 各級数近似 6 手法の理論値からのズレの比較

特筆すべきは, 厳密な無限級数展開である式 (3) と同様の値が出ている式 (7) (建部賢弘『綴術算経・円理綴術』[3, p.227] から) と中元率 (宅間能清『宅間流円理二巻』[3, p.234] から) である . 現代でも一般的でない近似式を経ても正しく値が求まっており, 内元率の式 (9) で合成した各係数も全て一致しそうではある .

## 7 おわりに

本稿では, 冪級数展開における現代と和算での違いの一例について比較した . これら形式的冪級数の係数変換について, 文献 [6] の数式処理システム Mathematica には少し実装されているが, Mizar や Coq などの証明検証システム [7] で厳密に確認できれば, 今後の和算研究などに有用だと感じるため, より詳しく調べたい .

## 参考文献

- [1] Gyopi, Moke など: “円周率の歴史”, ja.wikipedia, 2014 年 3 月.
- [2] Maschen, AlanUS など: “Inverse\_trigonometric\_functions#Infinite\_series”, en.wikipedia, 2014-03.
- [3] 遠藤利貞 [著], 三上義夫 [編], 平山諦 [補訂]: “増修日本数学史 第 2 版”, 恒星社厚生閣, 1981 年 3 月.
- [4] 田辺寿美枝: “『勘者御伽隻紙』の弧背真術”, 京都大学数理解析研究所講究録 1677:7382, 2010 年.
- [5] 竹野茂治: “3.4 積、商、合成関数”, ベキ級数論入門, <http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/lecture/misc/series1/series1.html>.
- [6] Wolfram: “ベキ級数の合成と逆関数”, MATHEMATICA9 チュートリアル, <http://reference.wolfram.com/mathematica/tutorial/CompositionAndInversionOfPowerSeries.ja.html>.
- [7] F. Wiedijk: “Formalizing 100 Theorems”, <http://www.cs.ru.nl/F.Wiedijk/100/index.html>.